

# APLICAÇÃO DO MÉTODO DE EULER EM PROBLEMAS DE CULTURAS DE BACTÉRIAS

Paulo Victor de Souza Aoki, Luis Roberto Almeida Gabriel Filho, Camila Pires Cremasco Gabriel, Thiago Ceber de Mello. – Matemática – Ciência da Computação – Docente da Unesp de Tupã, Docente do Departamento de Matemática - FAI - Adamantina / SP.

Os métodos numéricos são processos que fornecem soluções aproximadas em pontos particulares utilizando as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e cálculos funcionais. Com o surgimento de computadores com maior poder de processamento, tornou-se viável a utilização desses métodos para encontrar soluções aproximadas em diversos problemas. Nos últimos anos houve um crescimento acentuado no campo de equações diferenciais, que são importantes para estudar fenômenos onde há uma taxa de variação.

No presente estudo será utilizado o método de Euler para encontrar soluções próximas em problemas de cultura de bactérias.

De acordo com BASSANEZI, denominamos equações diferenciais ordinárias linear de 1ª ordem equações do tipo:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x) \quad (1)$$

Por BRONSON, caso se tenha  $g(x) \equiv 0$ , a equação resultante pode ser resolvida como separável, de forma  $\frac{dy}{y} = -f(x)dx$ , cuja solução real é:  $\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx + C$ , ou ainda  $\ln|y| = -\int f(x)dx + C$ .

Agora, suponhamos  $g(x) \neq 0$ . Para a determinação da solução de (1) devemos calcular o fator integrante  $I(x) = e^{\int f(x)dx}$ . Como  $I'(x) = f(x)I(x)$ , por (1) temos que:  $I(x)\frac{dy}{dx} + I(x)f(x)y = I(x)g(x) \Rightarrow I(x)\frac{dy}{dx} + I'(x)y = I(x)g(x) \Rightarrow \frac{d[I(x)y]}{dx} = I(x)g(x) \Rightarrow y = \frac{1}{I(x)} \left[ \int I(x)g(x)dx + C \right]$ , onde  $C \in \mathbb{R}$ .

Um problema de valor inicial consiste em uma equação diferencial juntamente com condições subsidiárias relativas à função incógnita e suas derivadas, todas dadas para um mesmo valor da variável independente (BRONSON).

Uma solução de um problema de valor inicial, ou de valores no contorno, é uma função  $y(x)$  que satisfaz não só a equação diferencial dada mas também a todas as condições subsidiárias. Um método numérico para resolver um problema de valor inicial é um processo que fornece soluções aproximadas em pontos particulares utilizando as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e cálculos funcionais.

Todos os métodos numéricos envolvem a determinação de soluções aproximadas em  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , onde a diferença entre dois valores sucessivos quaisquer de  $x$  é uma constante  $h$ , da forma  $h = x_{n+1} - x_n$ , com  $n = 0, 1, 2, \dots$ , sendo que o valor  $h$  é escolhido arbitrariamente. Em geral, quanto menor  $h$  melhor a aproximação obtida na solução.

Para o método numérico de Euler, estudam-se problemas de valor inicial de primeira ordem da forma  $y' = f(x, y)$ , com  $y(x_0) = y_0$ . A solução aproximada no ponto  $x_n$  será designada por  $y(x_n)$ , ou simplesmente  $y_n$ . Conhecido  $y_n$ , determinaremos  $y'_n$  através da relação  $y' = f(x_n, y_n)$ . Deste modo o método de Euler consiste em fazermos:  $y_{n+1} = y_n + hy'_n$  ou  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ .

Seja  $N(t)$  a quantidade de população sujeita a um processo de crescimento ou decrescimento. Se admitirmos que  $dN/dt$ , taxa de variação da quantidade de população, é proporcional à quantidade de população presente, então  $dN/dt = kN$ , ou

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

onde  $k$  é a constante de proporcionalidade.

Sabe-se que uma cultura de bactérias cresce a uma taxa proporcional a quantidade presente. A quantidade inicial de núcleos de bactérias é de 694, após 4 hora, observam-se 3000 núcleos de bactérias na cultura. Determine (a) uma expressão para o número de núcleos presentes na cultura no tempo arbitrário  $t$  e (b) o número de núcleos existentes na cultura após 10 horas.

(a) A equação diferencial que rege o sistema de cultura de bactérias é dada por:

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0.$$

Onde  $N$  é a quantidade de núcleos de bactérias,  $k$  é a constante de proporcionalidade e  $t$  é a unidade de Tempo.

A solução desta equação é:

$$N = ce^{kt} \quad (1)$$

Quando  $t = 0$ ,  $N = 694$ ; logo,

$$694 = ce^{k \cdot 0} \Rightarrow c = 694 \quad (2)$$

Ou seja, o valor da constante de integração  $c = 694$ .

Quando  $t = 4$ ,  $N = 3000$ ; logo,

$$\begin{aligned} 3000 &= 694e^{4k} \Rightarrow e^{4k} = \frac{3000}{694} \Rightarrow \\ \ln e^{4k} &= \ln \frac{3000}{694} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{3000}{694}}{4} = 0,366 \end{aligned}$$

Levando esses valores de  $k$  e  $c$  em (1), encontramos

$$N = 694e^{0,366t} \quad (3)$$

Como expressão da quantidade de núcleos presentes no tempo arbitrário  $t$ .

(b) Queremos  $N$  quando  $t = 7$ , fazendo  $t = 7$  em (3), obtemos  $N = 694e^{(0,366)(7)} = 8995$

Agora o problema será resolvido utilizando o método de Euler.

Seja,  $N = y$ ,  $-k = a$  e  $0 = b$ , temos que:

$$\begin{aligned} y' + ay &= b \Rightarrow y' = b - ay \Rightarrow \\ y'_n &= b - ay_n \quad (I) \end{aligned}$$

O método de Euler é dado pela seguinte fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

Aplicando o método de Euler em (I) temos:

$$y_{n+1} = y_n + h(b - ay_n) \Rightarrow y_{n+1} = y_n + hb - hay_n \Rightarrow$$

$$y_{n+1} = hb + (1 - ha)y_n \Rightarrow y_{n+1} = (1 - ha)y_n$$

O resultado obtido utilizando-se um passo  $h=0,1$  pode ser visualizado na tabela abaixo, lembrando que a tabela esta simplificada para melhor visualização.

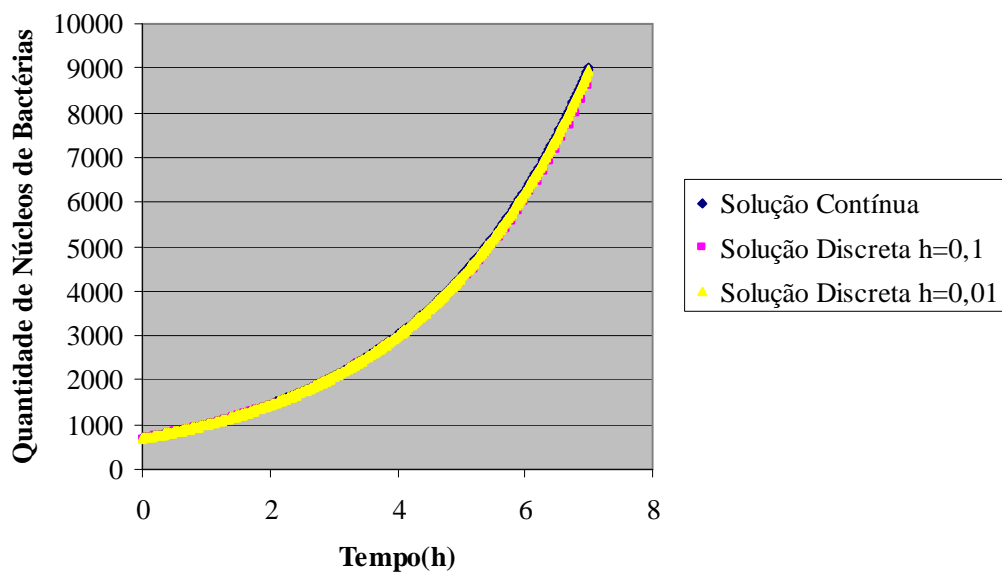
$t$	$y_n$	Solução Verdadeira: $N = 694e^{0,366t}$	Erro
	$h = 0,1$		$h = 0,1$
0	694	694	0
1	994	1001	7
2	1424	1443	19
3	2040	2081	40
4	2923	3000	77
5	4187	4326	139
6	5998	6238	240
7	8593	8995	402
Erro médio			116

**Tabela 1:** Tabela com os valores obtidos Discretamente com  $h = 0,1$  e continuamente, com os respectivos erros e erro médio

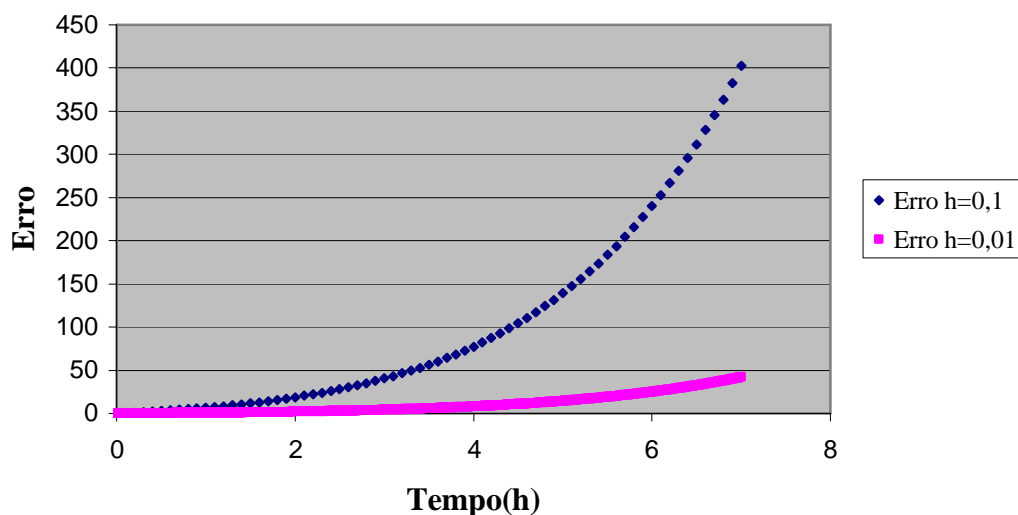
O resultado obtido utilizando-se um passo  $h = 0,01$  pode ser visualizado na tabela abaixo, lembrando que a tabela esta simplificada para melhor visualização.

$t$	$y_n$	Solução Verdadeira: $N = 694e^{0,366t}$	Erro
	$h = 0,01$		$h = 0,01$
0	694	694	0
1	1000	1001	1
2	1441	1443	2
3	2077	2081	4
4	2992	3000	8
5	4312	4326	14
6	6213	6238	25
7	8953	8995	42
Erro médio			12

**Tabela 2:** Tabela com os valores obtidos Discretamente com  $h = 0,01$  e continuamente, com os respectivos erros e erro médio



**Figura1:** Gráfico da Solução Tradicional (Contínua), da Solução Discreta com  $h = 0,1$  e Solução Discreta com  $h = 0,01$



**Figura2:** Gráfico do Erro da aproximação pelo Método de Euler com  $h = 0,1$  e  $h = 0,01$

O sistema discreto utilizado foi satisfatório no problema de cultura de bactérias. A solução do problema pelo método tradicional contínuo foi realizada para avaliar a precisão da solução numérica a qual utilizamos os passos  $h = 0,1$  e  $h = 0,01$ , cujos erros médios foram 116 e 12, respectivamente. Assim, foi possível concluir que quanto menor o valor do passo  $h$ , a solução discreta aproxima-se da contínua (real), mas sendo necessário um número muito maior de valores a serem calculados.

## BIBLIOGRAFIA

- BASSANEZI, R. C. Equações diferenciais com aplicações. São Paulo: Harbra, 1988. 572p.
- BRONSON, R. Moderna Introducao as Equacoes Diferenciais. São Paulo: Mcgraw-Hill, 1976. 387p.
- LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, 2002.